Aufgaben Potenzfunktionen

1. Zu Beginn der Beobachtung, also zum Zeitpunkt t = 1 h, hat eine Hefekultur ein Volumen von 4 cm³ [1,2 cm³]. Jede Stunde vergrößert sich ihr Volumen um ein Drittel des vorherigen Volumens.

a) Berechne das Volumen nach 2, 3, 4 und 5 Stunden.

b) Stelle die Entwicklung des Volumens in einer Tabelle dar.

c) Beschreibe, wie sich das Volumen im Laufe der Zeit verändert.

2. Berechne mithilfe des Taschenrechners Näherungswerte und runde diese auf vier Dezimalstellen.

a) $2^{\sqrt{3}}$ b) $3^{\frac{1}{4}\sqrt{2}}$ c) $5^{\sqrt{18}}$ d) $4{,}7^{\sqrt{\sqrt{6}}}$ e) $3^{-\sqrt{5}}$

3. Erstelle mithilfe des Taschenrechners eine Wertetabelle und zeichne die Graphen folgender beider Funktionen: $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ und $g(x)=4^x$ im Intervall $-4 \le x \le 4$. Verwende eine Schrittweite von 1.

Zeichne beide Graphen in dasselbe Koordinatensystem. Vergleiche sie darauf und beschreibe, was dir auffällt.

4. Der Graph der Exponentialfunktion $x \mapsto b^x$ verläuft durch den Punkt P. Bestimme die Basis b.

a) P(1 | 3) b) P(–2 | 4) c) P(3 | 0,125) d) P(–1 | 0,2)

b) Untersuche, wie sich anhand der Koordinaten des Punktes P erkennen lässt, ob die Basis b größer oder kleiner als 1 ist. Formuliere eine allgemeine Regel und begründe deine Aussage.

5. Vereinfache und berechne.

a) $44^{\sqrt{5}} : 11^{\sqrt{5}}$ b) $5^{\sqrt[3]{8}} \cdot 0{,}4^{\sqrt[3]{8}}$ c) $\left(6^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{20}}$ d) $2^{\sqrt{6}} \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^{5\sqrt{6}}$

© Mathematik Nachhilfe Blog

Lösungen

1. Zu Beginn der Beobachtung, also zum Zeitpunkt t = 1 h, hat eine Hefekultur ein Volumen von 4 cm³ [1,2 cm^3]. Jede Stunde vergrößert sich ihr Volumen um ein Drittel des vorherigen Volumens.

a) Berechne das Volumen nach 2, 3, 4 und 5 Stunden.

$f(t) = 4 \cdot (\frac{4}{3})^{t-1}$

t = 1

V = 4 cm^3

$f(2) = 4 \cdot (\frac{4}{3})^{2-1} = 4 \cdot (\frac{4}{3})^{1} = 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{3} \approx 5{,}33$

t = 2

$V \approx 5{,}33\,cm^3$

$f(3) = 4 \cdot (\frac{4}{3})^{3-1} = 4 \cdot (\frac{4}{3})^{2} = 4 \cdot \frac{16}{9} = \frac{64}{9} \approx 7{,}11$

t = 3

$V \approx 7{,}11\,cm^3$

$f(4) = 4 \cdot (\frac{4}{3})^{4-1} = 4 \cdot (\frac{4}{3})^{3} = 4 \cdot \frac{64}{27} = \frac{256}{27} \approx 9{,}48$

t = 4

$V \approx 9{,}48\,cm^3$

$f(5) = 4 \cdot (\frac{4}{3})^{5-1} = 4 \cdot (\frac{4}{3})^{4} = 4 \cdot \frac{256}{81} = \frac{1024}{81} \approx 12{,}64$

t = 5

$V \approx 12{,}64\,cm^3$

© Mathematik Nachhilfe Blog

b) Stelle die Entwicklung des Volumens in einer Tabelle dar.

Zeit (h)	1	2	3	4	5
Volumen (cm^3)	4	5,33	7,11	9,48	12,64

c) Beschreibe, wie sich das Volumen im Laufe der Zeit verändert.

Das Volumen der Hefekultur nimmt jede Stunde um ein Drittel des vorherigen Volumens zu. Dadurch wird das Volumen immer größer. Es handelt sich um exponentielles Wachstum, weil jede Stunde mit dem gleichen Faktor \(\frac{4}{3}\) multipliziert wird.

2. Berechne mithilfe des Taschenrechners Näherungswerte und runde diese auf vier Dezimalstellen.

a) $2^{\sqrt{3}}$

$2^{\sqrt{3}} = 3{,}32199708548 \approx 3{,}3220$

b) $3^{\frac{1}{4}\sqrt{2}}$

$3^{\frac{1}{4}\sqrt{2}} = 1{,}47464620441 \approx 1{,}4746$

c) $5^{\sqrt{18}}$

$5^{\sqrt{18}} = 923{,}588633514 \approx 923{,}5886$

d) $4{,}7^{\sqrt{\sqrt{6}}}$

$4{,}7^{\sqrt{\sqrt{6}}} = 11{,}2691197464 \approx 11{,}2691$

e) $3^{-\sqrt{5}}$

$3^{-\sqrt{5}} = 0{,}08572834524 \approx 0{,}0857$

3. Erstelle mithilfe des Taschenrechners eine Wertetabelle und zeichne die Graphen folgender beider Funktionen: $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ und $g(x) = 4^x$ im Intervall $-4 \leq x \leq 4$. Verwende eine Schrittweite von 1.

© Mathematik Nachhilfe Blog

$f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$

$x = -4;\quad f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{-4}=256$

$x = -3;\quad f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}=64$

$x = -2;\quad f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=16$

$x = -1;\quad f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=4$

$x = 0;\quad f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{0}=1$

$x = 1;\quad f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{1}=0{,}25$

$x = 2;\quad f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{2}=0{,}0625$

$x = 3;\quad f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{3}=0{,}015625$

$x = 4;\quad f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{4}=0{,}00390625$

$g(x) = 4^{x}$

$x = -4;\quad 4^{-4} = 0{,}00390625$

$x = -3;\quad 4^{-3} = 0{,}015625$

$x = -2;\quad 4^{-2} = 0{,}0625$

$x = -1;\quad 4^{-1} = 0{,}25$

$x = 0;\quad 4^{0} = 1$

$x = 1;\quad 4^{1} = 4$

$x = 2;\quad 4^{2} = 16$

$x = 3;\quad 4^{3} = 64$

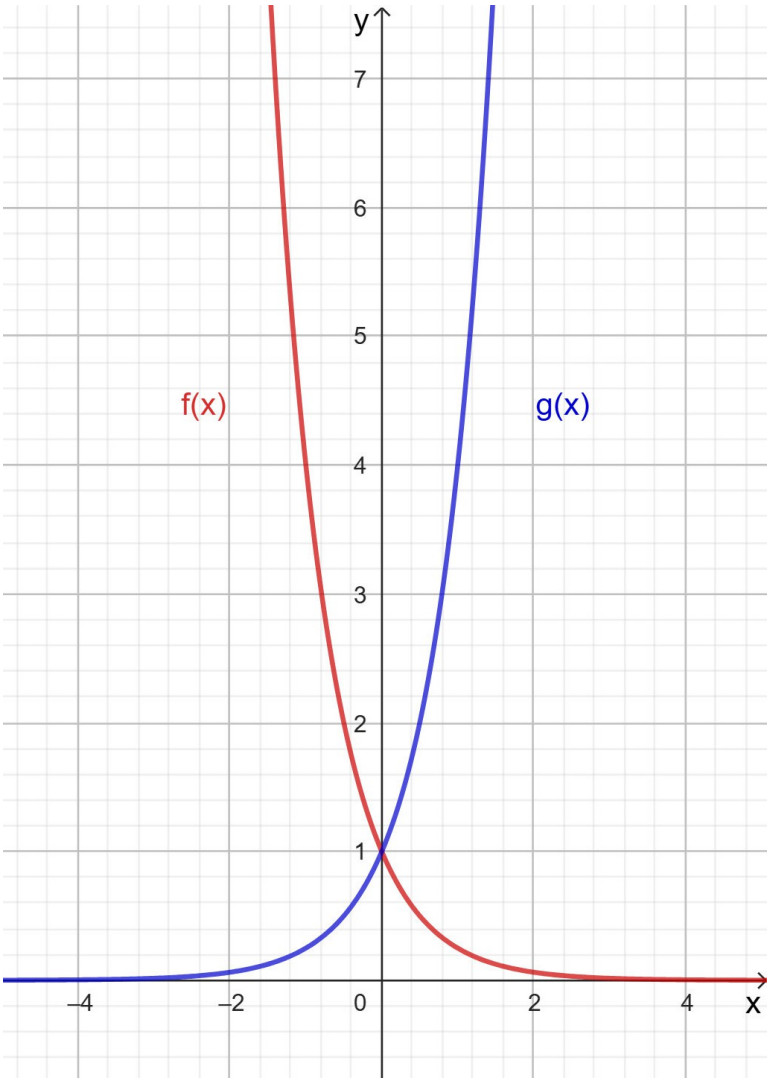
$x = 4;\quad 4^{4} = 256$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
f(x)	256	64	16	4	1	0,25	0,0625	0,015625	0,00390625

© Mathematik Nachhilfe Blog

g(x)	0,00390625	0,015625	0,0625	0,25	1	4	16	64	256

Zeichne beide Graphen in dasselbe Koordinatensystem. Vergleiche sie darauf und beschreibe, was dir auffällt.



Vergleich und Beobachtungen:

1. Der Graph von $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ fällt, der Graph von $g(x)=4^x$ steigt.
2. Beide Graphen schneiden sich bei (0|1).
3. Die Graphen sind spiegelbildlich zur y-Achse.
4. Beide Graphen liegen immer oberhalb der x-Achse und nähern sich ihr an, ohne sie zu berühren.

© Mathematik Nachhilfe Blog

5. Es gilt: $\left(\frac{1}{4}\right)^{x} = 4^{-x}$. Deshalb sind die beiden Funktionen Spiegelbilder voneinander.

4. Der Graph der Exponentialfunktion $x \mapsto b^x$ verläuft durch den Punkt P. Bestimme die Basis b.

a) P(1 | 3)

$b^1 = 3$

$b = 3$

b) P(–2 | 4)

$b^{-2} = 4$

$\frac{1}{b^2} = 4 \quad | \cdot b^2$

$1 = 4 \cdot b^2 \quad | : 4$

$b^2 = \frac{1}{4} \quad | \sqrt{\cdot}$

$b = \frac{1}{2}$

c) P(3 | 0,125)

$b^3 = 0{,}125 \quad | \sqrt[3]{\cdot}$

$b = 0{,}5$

d) P(–1 | 0,2)

$b^{-1} = 0{,}2$

$\frac{1}{b} = 0{,}2 \quad | \cdot b$

$1 = 0{,}2 \cdot b \quad | : 0{,}2$

$b = 5$

b) Untersuche, wie sich anhand der Koordinaten des Punktes P erkennen lässt, ob die Basis b größer oder kleiner als 1 ist. Formuliere eine allgemeine Regel und begründe deine Aussage.

© Mathematik Nachhilfe Blog

Allgemeine Regel

Bei einer Exponentialfunktion $f(x) = b^x$ gilt:

- Wenn x und y dasselbe Vorzeichen haben (beide positiv oder beide negativ), dann ist $b > 1$.
- Wenn x und y unterschiedliche Vorzeichen haben, dann ist $0 < b < 1$.

Begründung

Für $b > 1$ gilt:

- Bei positivem x ist $b^x > 1$.
- Bei negativem x ist b^x zwischen 0 und 1.

Für $0 < b < 1$ ist es genau umgekehrt:

- Bei positivem x ist b^x zwischen 0 und 1.
- Bei negativem x ist $b^x > 1$.

5. Vereinfache und berechne.

a) $44^{\sqrt{5}} : 11^{\sqrt{5}}$

a) $44^{\sqrt{5}} : 11^{\sqrt{5}} = \left(\frac{44}{11}\right)^{\sqrt{5}} = 4^{\sqrt{5}} \approx 22{,}1946$

b) $5^{\sqrt[3]{8}} \cdot 0{,}4^{\sqrt[3]{8}}$

$5^{\sqrt[3]{8}} \cdot 0{,}4^{\sqrt[3]{8}} = (5 \cdot 0{,}4)^{\sqrt[3]{8}} = 2^{\sqrt[3]{8}} = 2^2 = 4$

c) $\left(6^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{20}}$

$\left(6^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{20}} = 6^{\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}} = 6^{\sqrt{5 \cdot 20}} = 6^{\sqrt{100}} = 6^{10} = 60466176$

d) $2^{\sqrt{6}} \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^{5\sqrt{6}}$

$2^{\sqrt{6}} \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^{5\sqrt{6}} = 2^{\sqrt{6}} \cdot 2^{5\sqrt{6}} = 2^{\sqrt{6}+5\sqrt{6}} = 2^{6\sqrt{6}} \approx 26559{,}4648$

© Mathematik Nachhilfe Blog