

Aufgaben zu Bruchgleichungen

1. Bestimme die Lösungsmenge der Bruchgleichung.

a) $\frac{12}{7-2x}=12$

b) $\frac{1}{1-2x}=1$

c) $\frac{-12}{2+6x}=6$

d) $\frac{4x-4}{x-1}=3$

2. Ermittle bei den Bruchgleichungen die Lösungsmenge.

a) $\frac{2}{x^2+1}=\frac{4}{2x^2+x}$

b) $\frac{3}{x-2}=\frac{12}{2x+7}$

c) $\frac{1}{1-x}=\frac{-1}{3-x}$

d) $\frac{x+1}{x+3}=\frac{x-3}{x+1}$

3. Ein Schiff mit Getreide wird mittels zweier Fördergebläse entladen. Die zwei Fördergebläse benötigen hierfür 3 Stunden. Eines der Fördergebläse ist doppelt so schnell wie das andere. Wie viel an Zeit (in Stunden) benötigt jeweils ein Fördergebläse für sich alleine? (Anmerkung: Zur Lösung der Aufgabe ist die physikalische Formel der Arbeit (W) heranzuziehen. Diese ist $W = P \cdot t$. Die Leistung (P) mal der Zeit (t) entspricht der verrichteten Arbeit.)

4. Bestimme die Lösungsmenge der Bruchgleichung.

$$\text{a) } \frac{5}{x-6} + \frac{8}{x+6} = \frac{21}{x^2-36}$$

$$\text{b) } \frac{2}{3-a} + \frac{12}{9-a^2} = \frac{7}{3+a}$$

$$\text{c) } \frac{3}{s-2} + \frac{4}{s+2} = \frac{12}{s^2-4}$$

Lösungen

1. Bestimme die Lösungsmenge der Bruchgleichung.

$$\text{a) } \frac{12}{7-2x} = 12$$

$$\frac{12}{7-2x} = 12$$

Definitionsmenge:

$$7 - 2x = 0 \quad | + 2x$$

$$7 = 2x \quad | : 2$$

$$x = 3,5$$

$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 3,5\}$$

Lösungsmenge:

$$\frac{12}{7-2x} = 12 \quad | \cdot (7-2x)$$

$$12 = 12 \cdot (7 - 2x)$$

$$12 = 12 \cdot 7 + 12 \cdot (-2x)$$

$$12 = 84 - 24x \quad | - 84$$

$$-72 = -24x \quad | : (-24)$$

$$x = 3$$

$$L = \{3\}$$

$$\text{b) } \frac{1}{1-2x} = 1$$

$$\frac{1}{1-2x} = 1$$

Definitionsmenge:

$$1 - 2x = 0 \quad | + 2x$$

$$1 = 2x \quad | + 2$$

$$x = 0,5$$

$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 0,5\}$$

Lösungsmenge:

$$\frac{1}{1-2x} = 1 \quad | \cdot (1-2x)$$

$$1 = 1 - 2x$$

$$1 = 1 - 2x \quad | + 2x$$

$$1 = 1 - 2x \quad | - 1$$

$$0 = -2x \quad | : (-2)$$

$$x = 0$$

$$L = \{0\}$$

$$\text{c) } \frac{-12}{2+6x} = 6$$

$$\frac{-12}{2+6x} = 6$$

Definitionsmenge:

$$2 + 6x = 0 \quad | - 6x$$

$$2 = -6x \quad | : (-6)$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq -\frac{1}{3}\}$$

Lösungsmenge:

$$\frac{-12}{2+6x} = 6 \quad | \cdot (2+6x)$$

$$-12 = 6(2+6x)$$

$$-12 = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 6x$$

$$-12 = 12 + 36x \quad | -12$$

$$-24 = 36x \quad | : (-24)$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

$$L = \{-\frac{2}{3}\}$$

$$d) \frac{4x-4}{x-1} = 3$$

$$\frac{4x-4}{x-1} = 3$$

Definitionsmenge:

$$x-1=0 \quad | +1$$

$$x=1$$

$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 1\}$$

Lösungsmenge:

$$\frac{4x-4}{x-1}=3 \quad | \cdot (x-1)$$

$$4x-4=3(x-1)$$

$$4x-4=3x+3 \quad (-1)$$

$$4x-4=3x-3 \quad | -3x$$

$$x-4=-3 \quad | +4$$

$$x=1$$

$$L = \emptyset$$

2. Ermittle bei den Bruchgleichungen die Lösungsmenge.

$$\text{a) } \frac{2}{x^2+1} = \frac{4}{2x^2+x}$$

$$\frac{2}{x^2+1} = \frac{4}{2x^2+x}$$

Definitionsmenge:

$$x^2+1=0 \quad | -1$$

$$x^2=-1 \quad | \sqrt{\quad}$$

$x =$ nicht definiert in \mathbb{Q}

$$2x^2+x=0$$

$$x(2x+1)=0$$

$$x=0$$

$$2x + 1 = 0 \quad | -1$$

$$2x = -1 \quad | :2$$

$$x = -0,5$$

$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq -0,5; 0\}$$

Lösungsmenge:

$$\frac{2}{x^2+1} = \frac{4}{2x^2+x}$$

$$\frac{2}{x^2+1} = \frac{4}{x \cdot (2x+1)} \quad | \cdot (x^2+1) \cdot x \cdot (2x+1)$$

$$2 \cdot x \cdot (2x+1) = 4 \cdot (x^2+1)$$

$$2x \cdot 2x + 2x \cdot 1 = 4 \cdot x^2 + 4 \cdot 1$$

$$4x^2 + 2x = 4x^2 + 4 \quad | -4x^2$$

$$2x = 4 \quad | :2$$

$$x = 2$$

$$L = \{2\}$$

$$\text{b) } \frac{3}{x-2} = \frac{12}{2x+7}$$

$$\frac{3}{x-2} = \frac{12}{2x+7}$$

Definitionsmenge:

$$x - 2 = 0 \quad | +2$$

$$x = 2$$

$$2x + 7 = 0 \quad | -7$$

$$2x = -7 \quad | : 2$$

$$x = -3,5$$

$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq -3,5; 2\}$$

Lösungsmenge:

$$\frac{3}{x-2} = \frac{12}{2x+7} \quad | \cdot (x-2) \cdot (2x+7)$$

$$3(2x+7) = 12(x-2)$$

$$3 \cdot 2x + 3 \cdot 7 = 12 \cdot x + 12 \cdot (-2)$$

$$6x + 21 = 12x - 24 \quad | - 6x$$

$$21 = 6x - 24 \quad | + 24$$

$$45 = 6x \quad | : 6$$

$$x = 7,5$$

$$L = \{7,5\}$$

$$c) \frac{1}{1-x} = \frac{-1}{3-x}$$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{-1}{3-x}$$

Definitionsmenge:

$$1 - x = 0 \quad | + x$$

$$x = 1$$

$$3 - x = 0 \quad | + x$$

$$x = 3$$

$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 1; 3\}$$

Lösungsmenge:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{-1}{3-x} \quad | \cdot (1-x) \cdot (3-x)$$

$$1 \cdot (3-x) = -1 \cdot (1-x)$$

$$1 \cdot 3 + 1 \cdot (-x) = -1 \cdot 1 + -1 \cdot (-x)$$

$$3 - x = -1 + x \quad | + x$$

$$3 = -1 + 2x \quad | + 1$$

$$4 = 2x \quad | : 2$$

$$x = 2$$

$$L = \{2\}$$

$$d) \frac{x+1}{x+3} = \frac{x-3}{x+1}$$

$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{x-3}{x+1}$$

Definitionsmenge:

$$x+3=0 \quad | -3$$

$$x = -3$$

$$x+1=0 \quad | -1$$

$$x = -1$$

$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq -3; -1\}$$

Lösungsmenge:

$$\frac{x+1}{x+3} = \frac{x-3}{x+1} \quad | \cdot (x+3) \cdot (x+1)$$

$$(x+1)(x+1) = (x-3)(x+3)$$

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 - 9 \quad | -x^2$$

$$2x + 1 = -9 \quad | -1$$

$$2x = -10 \quad | :2$$

$$x = -5$$

$$x = -5$$

$$L = \{-5\}$$

3. Ein Schiff mit Getreide wird mittels zweier Fördergebläse entladen. Die zwei Fördergebläse benötigen hierfür 3 Stunden. Eines der Fördergebläse ist doppelt so schnell wie das andere. Wie viel an Zeit (in Stunden) benötigt jeweils ein Fördergebläse für sich alleine? (Anmerkung: Zur Lösung der Aufgabe ist die physikalische Formel der Arbeit (W) heranzuziehen. Diese ist $W = P \cdot t$. Die Leistung (P) mal der Zeit (t) entspricht der verrichteten Arbeit.)

P_1 = Leistung langsames Gebläse

P_2 = Leistung doppelt schnelleres Gebläse

$$P_2 = 2 \cdot P_1$$

$$P_{\text{Gesamt}} = P_1 + P_2$$

$$P_{\text{Gesamt}} = P_1 + 2 \cdot P_1 = 3 \cdot P_1$$

$$W = P \cdot t$$

$$W = 3 \cdot P_1 \cdot t$$

$$t = 3$$

$$W = 3 \cdot P_1 \cdot 3$$

$$W = 9 \cdot P_1$$

$$t = \frac{W}{P}$$

Langsames Gebläse:

$$t_1 = \frac{W}{P_1}$$

$$t_1 = \frac{9 \cdot P_1}{P_1}$$

$$t_1 = 9$$

Schnelleres Gebläse:

$$t_2 = \frac{W}{2 \cdot P_1}$$

$$t_2 = \frac{9 \cdot P_1}{2 \cdot P_1}$$

$$t_2 = \frac{9}{2}$$

$$t_2 = 4,5$$

Das langsamere Gebläse benötigt 9 Stunden und das schnellere Gebläse 4,5 Stunden, um das Schiff zu entladen.

4. Bestimme die Lösungsmenge der Bruchgleichung.

$$\frac{5}{x-6} + \frac{8}{x+6} = \frac{21}{x^2-36}$$

Definitionsmenge:

$$x - 6 = 0 \quad | +6$$

$$x = 6$$

$$x + 6 = 0 \quad | -6$$

$$x = -6$$

$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq -6; 6\}$$

$$\frac{5}{x-6} + \frac{8}{x+6} = \frac{21}{x^2-36}$$

$$\frac{5}{x-6} + \frac{8}{x+6} = \frac{21}{(x-6) \cdot (x+6)} \quad | \cdot (x-6) \cdot (x+6)$$

$$5(x+6) + 8(x-6) = 21$$

$$5x + 30 + 8x - 48 = 21$$

$$13x - 18 = 21$$

$$13x - 18 = 21 \quad | +18$$

$$13x = 39 \quad | :13$$

$$x = 3$$

$$L = \{3\}$$

$$\text{b) } \frac{2}{3-a} + \frac{12}{9-a^2} = \frac{7}{3+a}$$

$$\frac{2}{3-a} + \frac{12}{9-a^2} = \frac{7}{3+a}$$

$$3 - a = 0 \quad | + a$$

$$3 = a$$

$$3 + a = 0 \quad | - 3$$

$$a = -3$$

$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq -3; 3\}$$

Lösungsmenge:

$$\frac{2}{3-a} + \frac{12}{9-a^2} = \frac{7}{3+a}$$

$$\frac{2}{3-a} + \frac{12}{(3-a) \cdot (3+a)} = \frac{7}{3+a} \quad | \cdot (3-a) \cdot (3+a)$$

$$2(3+a) + 12 = 7(3-a)$$

$$2 \cdot 3 + 2 \cdot a + 12 = 7 \cdot 3 + 7 \cdot (-a)$$

$$6 + 2a + 12 = 21 - 7a$$

$$18 + 2a = 21 - 7a \quad | + 7a$$

$$18 + 9a = 21 \quad | - 18$$

$$9a = 3 \quad | : 9$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$L = \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

$$c) \frac{3}{s-2} + \frac{4}{s+2} = \frac{12}{s^2-4}$$

$$\frac{3}{s-2} + \frac{4}{s+2} = \frac{12}{s^2-4}$$

Definitionsmenge:

$$s-2=0 \quad | +2$$

$$s=2$$

$$s+2=0 \quad | -2$$

$$s=-2$$

$$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq -2; 2\}$$

Lösungsmenge:

$$\frac{3}{s-2} + \frac{4}{s+2} = \frac{12}{s^2-4}$$

$$\frac{3}{s-2} + \frac{4}{s+2} = \frac{12}{(s-2) \cdot (s+2)} \quad | \cdot (s-2) \cdot (s+2)$$

$$3(s+2) + 4(s-2) = 12$$

$$3s + 3 \cdot 2 + 4s + 4 \cdot (-2) = 12$$

$$3s + 6 + 4s - 8 = 12$$

$$7s - 2 = 12 \quad | +2$$

$$7s = 14 \quad | :7$$

$$s = 2$$

$$L = \emptyset$$