Aufgaben zu Bruchgleichungen

1. Bestimme die Lösungsmenge der Bruchgleichung.

a) $\frac{12}{7-2x}=12$

b) $\frac{1}{1-2x}=1$

c) $\frac{-12}{2+6x}=6$

d) $\frac{4x-4}{x-1}=3$

2. Ermittle bei den Bruchgleichungen die Lösungsmenge.

a) $\frac{2}{x^2+1}=\frac{4}{2x^2+x}$

b) $\frac{3}{x-2}=\frac{12}{2x+7}$

c) $\frac{1}{1-x}=\frac{-1}{3-x}$

d) $\frac{x+1}{x+3}=\frac{x-3}{x+1}$

3. Ein Schiff mit Getreide wird mittels zweier Fördergebläse entladen. Die zwei Fördergebläse benötigen hierfür 3 Stunden. Eines der Fördergebläse ist doppelt so schnell wie das andere. Wie viel an Zeit (in Stunden) benötigt jeweils ein Fördergebläse für sich alleine? (Anmerkung: Zur Lösung der Aufgabe ist die physikalische Formel der Arbeit (W) heranzuziehen. Diese ist $W = P \cdot t$. Die Leistung (P) mal der Zeit (t) entspricht der verrichteten Arbeit.)

4. Bestimme die Lösungsmenge der Bruchgleichung.

a) $\frac{5}{x-6}+\frac{8}{x+6}=\frac{21}{x^2-36}$

b) $\frac{2}{3-a}+\frac{12}{9-a^2}=\frac{7}{3+a}$

c) $\frac{3}{s-2}+\frac{4}{s+2}=\frac{12}{s^2-4}$

Lösungen

1. Bestimme die Lösungsmenge der Bruchgleichung.

a) $\frac{12}{7-2x}=12$

$\frac{12}{7-2x}=12$

Definitionsmenge:

$7 - 2x = 0 \quad | + 2x$

$7 = 2x \quad | : 2$

$x = 3{,}5$

$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 3{,}5\}$

Lösungsmenge:

$\frac{12}{7-2x}=12 \quad | \cdot (7-2x)$

$12 = 12 \cdot (7 - 2x)$

$12 = 12 \cdot 7 + 12 \cdot (-2x)$

$12 = 84 - 24x \quad | - 84$

$-72 = -24x \quad | : (-24)$

$x = 3$

$L = \{3\}$

b) $\frac{1}{1-2x}=1$

$\frac{1}{1-2x}=1$

Definitionsmenge:

$1 - 2x = 0 \quad | + 2x$

$1 = 2x \quad | + 2$

$x = 0{,}5$

$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 0{,}5\}$

Lösungsmenge:

$\frac{1}{1-2x}=1 \quad | \cdot (1-2x)$

$1 = 1 \cdot (1 - 2x)$

$1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2x)$

$1 = 1 - 2x \quad | - 1$

$0 = -2x \quad | : (-2)$

$x = 0$

$L = \{0\}$

c) $\frac{-12}{2+6x}=6$

$\frac{-12}{2+6x}=6$

Definitionsmenge:

$2 + 6x = 0 \quad | - 6x$

$2 = -6x \quad | : (-6)$

$x = -\frac{1}{3}$

$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq -\frac{1}{3}\}$

Lösungsmenge:

$\frac{-12}{2+6x} = 6 \quad | \cdot (2+6x)$

$-12 = 6 \cdot (2 + 6x)$

$-12 = 6 \cdot 2 + 6 \cdot 6x$

$-12 = 12 + 36x \quad | -12$

$-24 = 36x \quad | : (-24)$

$x = -\frac{2}{3}$

$L = \{-\frac{2}{3}\}$

d) $\frac{4x-4}{x-1} = 3$

$\frac{4x-4}{x-1} = 3$

Definitionsmenge:

$x - 1 = 0 \quad | + 1$

$x = 1$

$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 1\}$

Lösungsmenge:

$\frac{4x-4}{x-1}=3 \quad | \cdot (x-1)$

$4x - 4 = 3 \cdot (x - 1)$

$4x - 4 = 3 \cdot x + 3 \cdot (-1)$

$4x - 4 = 3x - 3 \quad | - 3x$

$x - 4 = -3 \quad | + 4$

$x = 1$

$L = Ø$

2. Ermittle bei den Bruchgleichungen die Lösungsmenge.

a) $\frac{2}{x^2+1}=\frac{4}{2x^2+x}$

$\frac{2}{x^2+1}=\frac{4}{2x^2+x}$

Definitionsmenge:

$x^2 + 1 = 0 \quad | - 1$

$x^2 = -1 \quad | \sqrt{}$

$x =$ nicht definiert in $\mathbb{Q}$

$2x^2 + x = 0$

$x \quad (2x + 1) = 0$

$x = 0$

$2x + 1 = 0 \quad | - 1$

$2x = -1 \quad | : 2$

$x = -0{,}5$

$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq -0{,}5; 0\}$

Lösungsmenge:

$$\frac{2}{x^2+1} = \frac{4}{2x^2+x}$$

$$\frac{2}{x^2+1} = \frac{4}{x \cdot (2x+1)} \quad | \cdot (x^2+1) \cdot x \cdot (2x+1)$$

$2 \cdot x \cdot (2x + 1) = 4 \cdot (x^2 + 1)$

$2x \cdot 2x + 2x \cdot 1 = 4 \cdot x^2 + 4 \cdot 1$

$4x^2 + 2x = 4x^2 + 4 \quad | - 4x^2$

$2x = 4 \quad | : 2$

$x = 2$

$L = \{2\}$

b) $\frac{3}{x-2} = \frac{12}{2x+7}$

$$\frac{3}{x-2} = \frac{12}{2x+7}$$

Definitionsmenge:

$x - 2 = 0 \quad | + 2$

$x = 2$

$2x + 7 = 0 \quad | - 7$

$2x = -7 \quad | : 2$

$x = -3{,}5$

$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq -3{,}5;\ 2\}$

Lösungsmenge:

$$\frac{3}{x-2} = \frac{12}{2x+7} \quad | \cdot (x-2) \cdot (2x+7)$$

$3 \cdot (2x + 7) = 12 \cdot (x - 2)$

$3 \cdot 2x + 3 \cdot 7 = 12 \cdot x + 12 \cdot (-2)$

$6x + 21 = 12x - 24 \quad | - 6x$

$21 = 6x - 24 \quad | + 24$

$45 = 6x \quad | : 6$

$x = 7{,}5$

$L = \{7{,}5\}$

c) $\frac{1}{1-x} = \frac{-1}{3-x}$

$$\frac{1}{1-x} = \frac{-1}{3-x}$$

Definitionsmenge:

$1 - x = 0 \quad | + x$

$x = 1$

$3 - x = 0 \quad | + x$

$x = 3$

$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq 1; 3\}$

Lösungsmenge:

$\frac{1}{1-x} = \frac{-1}{3-x} \qquad | \cdot (1-x) \cdot (3-x)$

$1 \cdot (3 - x) = -1 \cdot (1 - x)$

$1 \cdot 3 + 1 \cdot (-x) = -1 \cdot 1 + -1 \cdot (-x)$

$3 - x = -1 + x \qquad | + x$

$3 = -1 + 2x \qquad | + 1$

$4 = 2x \qquad | : 2$

$x = 2$

$L = \{2\}$

d) $\frac{x+1}{x+3} = \frac{x-3}{x+1}$

$\frac{x+1}{x+3} = \frac{x-3}{x+1}$

Definitionsmenge:

$x + 3 = 0 \quad | - 3$

$x = -3$

$x + 1 = 0 \quad | - 1$

$x = -1$

$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq -3; -1\}$

Lösungsmenge:

$$\frac{x+1}{x+3}=\frac{x-3}{x+1} \qquad | \cdot (x+3) \cdot (x+1)$$

$(x + 1) \cdot (x + 1) = (x – 3) \cdot (x + 3)$

$x \cdot x + 2 \cdot x \cdot 1 + 1 \cdot 1 = x \cdot x – 3 \cdot 3$

$x^2 + 2x + 1 = x^2 – 9 \ | \ – x^2$

$2x + 1 = –9 \qquad | \ – 1$

$2x = –10 \qquad | \ : 2$

$x = –5$

$L = \{–5\}$

3. Ein Schiff mit Getreide wird mittels zweier Fördergebläse entladen. Die zwei Fördergebläse benötigen hierfür 3 Stunden. Eines der Fördergebläse ist doppelt so schnell wie das andere. Wie viel an Zeit (in Stunden) benötigt jeweils ein Fördergebläse für sich alleine? (Anmerkung: Zur Lösung der Aufgabe ist die physikalische Formel der Arbeit (W) heranzuziehen. Diese ist $W = P \cdot t$. Die Leistung (P) mal der Zeit (t) entspricht der verrichteten Arbeit.)

P_1 = Leistung langsameres Gebläse

P_2 = Leistung doppelt schnelleres Gebläse

$P_2 = 2 \cdot P_1$

$P_{Gesamt} = P_1 + P_2$

$P_{Gesamt} = P_1 + 2 \cdot P_1 = 3 \cdot P_1$

$W = P \cdot t$

$W = 3 \cdot P_1 \cdot t$

$t = 3$

$W = 3 \cdot P_1 \cdot 3$

$W = 9 \cdot P_1$

$$t = \frac{W}{P}$$

Langsames Gebläse:

$$t_1 = \frac{W}{P_1}$$

$$t_1 = \frac{9 \cdot P_1}{P_1}$$

$t_1 = 9$

Schnelleres Gebläse:

$$t_2 = \frac{W}{2 \cdot P_1}$$

$$t_2 = \frac{9 \cdot P_1}{2 \cdot P_1}$$

$$t_2 = \frac{9}{2}$$

$t_2 = 4{,}5$

Das langsamere Gebläse benötigt 9 Stunden und das schnellere Gebläse 4,5 Stunden, um das Schiff zu entladen.

4. Bestimme die Lösungsmenge der Bruchgleichung.

$$\frac{5}{x-6}+\frac{8}{x+6}=\frac{21}{x^2-36}$$

Definitionsmenge:

$x - 6 = 0 \quad | + 6$

$x = 6$

$x + 6 = 0 \quad | - 6$

$x = -6$

$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq -6; 6\}$

$$\frac{5}{x-6}+\frac{8}{x+6}=\frac{21}{x^2-36}$$

$$\frac{5}{x-6}+\frac{8}{x+6}=\frac{21}{(x-6)\cdot(x+6} \quad | \cdot (x-6) \cdot (x+6)$$

$5 \cdot (x + 6) + 8 \cdot (x - 6) = 21$

$5 \cdot x + 5 \cdot 6 + 8 \cdot x + 8 \cdot (-6) = 21$

$5x + 30 + 8x - 48 = 21$

$13x - 18 = 21 \quad | + 18$

$13x = 39 \quad | : 13$

$x = 3$

$L = \{3\}$

b) $\frac{2}{3-a}+\frac{12}{9-a^2}=\frac{7}{3+a}$

$$\frac{2}{3-a}+\frac{12}{9-a^2}=\frac{7}{3+a}$$

$3 - a = 0 \quad | + a$

$3 = a$

$3 + a = 0 \quad | - 3$

$a = -3$

$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq -3; 3\}$

Lösungsmenge:

$$\frac{2}{3-a} + \frac{12}{9-a^2} = \frac{7}{3+a}$$

$$\frac{2}{3-a} + \frac{12}{(3-a) \cdot (3+a)} = \frac{7}{3+a} \quad | \cdot (3-a) \cdot (3+a)$$

$2 \cdot (3 + a) + 12 = 7 \cdot (3 - a)$

$2 \cdot 3 + 2 \cdot a + 12 = 7 \cdot 3 + 7 \cdot (-a)$

$6 + 2a + 12 = 21 - 7a$

$18 + 2a = 21 - 7a \quad | + 7a$

$18 + 9a = 21 \quad | - 18$

$9a = 3 \quad | : 9$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$L = \{\frac{1}{3}\}$$

c) $$\frac{3}{s-2} + \frac{4}{s+2} = \frac{12}{s^2-4}$$

$$\frac{3}{s-2} + \frac{4}{s+2} = \frac{12}{s^2-4}$$

Definitionsmenge:

$s - 2 = 0 \quad | + 2$

$s = 2$

$s + 2 = 0 \quad | - 2$

$s = -2$

$D = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \neq -2; 2\}$

Lösungsmenge:

$$\frac{3}{s-2} + \frac{4}{s+2} = \frac{12}{s^2 - 4}$$

$$\frac{3}{s-2} + \frac{4}{s+2} = \frac{12}{(s-2) \cdot (s+2)} \quad | \cdot (s-2) \cdot (s+2)$$

$3 \cdot (s + 2) + 4 \cdot (s - 2) = 12$

$3 \cdot s + 3 \cdot 2 + 4 \cdot s + 4 \cdot (-2) = 12$

$3s + 6 + 4s - 8 = 12$

$7s - 2 = 12 \quad | + 2$

$7s = 14 \quad | : 7$

$s = 2$

$L = Ø$