Aufgaben zu Bruchgleichungen

1. Bestimme zunächst die Definitionsmenge, anschließend die Lösung der Bruchgleichung.

a) $\frac{8}{x-1}=4$

b) $\frac{12}{-3x+5}=6$

c) $\frac{15}{x+10}=5$

d) $\frac{1}{1-2x}=1$

2. Erkläre, warum bei folgender Bruchgleichung die Definitionsmenge uneingeschränkt ist. Ermittle darauf die Lösungsmenge.

$\frac{4x+1}{2x^2+2}=\frac{3x}{x^2+1}$

3. Bestimme die Definitionsmenge und die Lösung der Bruchgleichung.

a) $\frac{7}{3-x}=\frac{3}{5-x}$

b) $\frac{5}{x-1}=\frac{8}{3x+1}$

c) $\frac{1}{3}=\frac{8}{5+x}$

d) $\frac{7}{x-5}=\frac{2}{x}$

4. Ermittle die Lösung der Bruchgleichung. Bestimme vorher deren Definitionsmenge.

a) $\frac{a+5}{a-5}=\frac{a+9}{a-3}$

b) $\frac{4}{y}+\frac{15}{y}-\frac{9}{2y}=36$

c) $\frac{2y+6}{y+3}=1$

d) $\frac{5}{a-1}=\frac{7}{a+1}$

Lösungen

1. Bestimme zunächst die Definitionsmenge, anschließend die Lösung der Bruchgleichung.

a) $\frac{8}{x-1}=4$

Definitionsmenge:

$x - 1 = 0 \quad | + 1$

$x = 1$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$

Lösungsmenge:

$\frac{8}{x-1}=4 \quad | \cdot (x - 1)$

$8 = 4 \cdot (x - 1)$

$8 = 4 \cdot x + 4 \cdot (-1)$

$8 = 4x - 4 \quad | + 4$

$12 = 4x \quad | : 4$

$x = 3$

$L = \{3\}$

b) $\frac{12}{-3x+5}=6$

Definitionsmenge:

$-3x + 5 = 0 \quad | - 5$

$-3x = -5 \qquad | : (-3)$

$x = \frac{5}{3}$

$D = \mathbb{Q} \setminus \frac{5}{3}$

Lösungsmenge:

$\frac{12}{-3x + 5} = 6 \qquad | \cdot (-3x + 5)$

$12 = 6 \cdot (-3x + 5)$

$12 = 6 \cdot (-3x) + 6 \cdot 5$

$12 = -18x + 30 \quad | - 30$

$-18 = -18x \qquad | : (-18)$

$x = 1$

$L = \{1\}$

c) $\frac{15}{x + 10} = 5$

Definitionsmenge:

$x + 10 = 0 \quad | - 10$

$x = -10$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{-10\}$

Lösungsmenge:

$\frac{15}{x + 10} = 5 \quad | \cdot (x + 10)$

$15 = 5 \cdot (x + 10)$

$15 = 5 \cdot x + 5 \cdot 10$

$15 = 5x + 50 \quad | - 50$

$-35 = 5x \quad | : 5$

$x = -7$

$L = \{-7\}$

d) $\frac{1}{1 - 2x} = 1$

Definitionsmenge:

$1 - 2x = 0 \quad | + 2x$

$1 = 2x \quad | + 2$

$x = 0{,}5$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{0{,}5\}$

Lösungsmenge:

$\frac{1}{1 - 2x} = 1 \quad | \cdot (1 - 2x)$

$1 = 1 \cdot (1 - 2x)$

$1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2x)$

$1 = 1 - 2x \quad | - 1$

$0 = -2x \quad | : (-2)$

$x = 0$

$L = \{0\}$

2. Erkläre, warum bei folgender Bruchgleichung die Definitionsmenge uneingeschränkt ist. Ermittle darauf die Lösungsmenge.

$$\frac{4x + 1}{2x^2 + 2} = \frac{3x}{x^2 + 1}$$

Definitionsmenge:

$2x^2 + 2 = 0 \quad | - 2$

$2x^2 = -2 \quad | : 2$

$x^2 = -1 \quad | \sqrt{}$

$x =$ nicht definiert in $\mathbb{Q}$

$x^2 - 1 = 0 \quad | - 1$

$x^2 = -1 \quad | \sqrt{}$

$x =$ nicht definiert in $\mathbb{Q}$

$D = \mathbb{Q}$

Lösungsmenge

$$\frac{4x + 1}{2x^2 + 2} = \frac{3x}{x^2 + 1}$$

$$\frac{4x + 1}{2 \cdot (x^2 + 1)} = \frac{3x}{x^2 + 1} \quad | \cdot 2 \cdot (x^2 + 1)$$

$4x + 1 = 3x \cdot 2$

$4x + 1 = 6x \quad | - 4x$

$1 = 2x \quad | : 2$

$x = 0{,}5$

$L = \{0{,}5\}$

3. Bestimme die Definitionsmenge und die Lösung der Bruchgleichung.

a) $\frac{7}{3-x} = \frac{3}{5-x}$

Definitionsmenge:

$3 - x = 0 \quad | + x$

$x = 3$

$5 - x = 0 \quad | + x$

$5 = x$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{3; 5\}$

Lösungsmenge:

$\frac{7}{3-x} = \frac{3}{5-x} \quad | \cdot (3-x) \cdot (5-x)$

$7 \cdot (5 - x) = 3 \cdot (3 - x)$

$7 \cdot 5 + 7 \cdot (-x) = 3 \cdot 3 + 3 \cdot (-x)$

$35 - 7x = 9 - 3x \quad | + 7x$

$35 = 9 + 4x \quad | - 9$

$26 = 4x \quad | : 4$

$x = 6{,}5$

$L = \{6{,}5\}$

b) $\frac{5}{x-1} = \frac{8}{3x+1}$

Definitionsmenge:

$x - 1 = 0 \quad | + 1$

$x = 1$

$3x + 1 = 0 \quad | - 1$

$3x = -1 \quad | : 3$

$x = -\frac{1}{3}$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{-\frac{1}{3}; 1\}$

Lösungsmenge:

$\frac{5}{x-1} = \frac{8}{3x+1} \quad | \cdot (x-1) \cdot (3x+1)$

$5 \cdot (3x + 1) = 8 \cdot (x - 1)$

$5 \cdot 3x + 5 \cdot 1 = 8 \cdot x + 8 \cdot (-1)$

$15x + 5 = 8x - 8 \quad | - 8x$

$7x + 5 = -8 \quad | - 6$

$7x = -13 \quad | : 7$

$x = -\frac{13}{7}$

$L = \{-\frac{13}{7}\}$

c) $\frac{1}{3} = \frac{8}{5 + x}$

Definitionsmenge:

$5 + x = 0 \quad | - 5$

$x = -5 \quad | : 8$

$x = -5$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{-5\}$

Lösungsmenge:

$\frac{1}{3} = \frac{8}{5 + x} \quad | \cdot 3 \cdot (5 + x)$

$1 \cdot (5 + x) = 8 \cdot 3$

$1 \cdot 5 + 1 \cdot x = 24$

$5 + x = 24 \quad | - 5$

$x = 19$

$L = \{19\}$

d) $\frac{7}{x - 5} = \frac{2}{x}$

Definitionsmenge:

$x - 5 = 0 \quad | + 5$

$x = 5$

$x = 0$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 5\}$

Lösungsmenge:

$\frac{7}{x-5} = \frac{2}{x} \quad | \cdot (x-5) \cdot x$

$7 \cdot x = 2 \cdot (x-5)$

$7x = 2 \cdot x + 2 \cdot (-5)$

$7x = 2x - 10 \quad | - 2x$

$5x = -10 \quad | : 5$

$x = -2$

$L = \{-2\}$

4. Ermittle die Lösung der Bruchgleichung. Bestimme vorher deren Definitionsmenge.

a) $\frac{a+5}{a-5} = \frac{a+9}{a-3}$

Definitionsmenge:

$a - 5 = 0 \quad | + 5$

$a = 5$

$a - 3 = 0 \quad | + 3$

$a = 3$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{3; 5\}$

Lösungsmenge:

$$\frac{a+5}{a-5} = \frac{a+9}{a-3} \quad | \cdot (a-5) \cdot (a-3)$$

$(a+5) \cdot (a-3) = (a+9) \cdot (a-5)$

$a \cdot a + a \cdot (-3) + 5 \cdot a + 5 \cdot (-3) = a \cdot a + a \cdot (-5) + 9 \cdot a + 9 \cdot (-5)$

$a^2 - 3a + 5a - 15 = a^2 - 5a + 9a - 45$

$a^2 + 2a - 15 = a^2 + 4a - 45 \quad | - a^2$

$2a - 15 = 2a - 45 \quad | - 2a$

$-15 = 2a - 45 \quad | + 45$

$30 = 2a \quad | : 2$

$a = 15$

$L = \{15\}$

b) $\frac{4}{y} + \frac{15}{y} - \frac{9}{2y} = 36$

Definitionsmenge:

$y = 0$

$2y = 0 \quad | : 2$

$y = 0$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

Lösungsmenge:

$\frac{4}{y}+\frac{15}{y}-\frac{9}{2y}=36 \quad | \cdot 2y$

$4 \cdot 2 + 15 \cdot 2 - 9 = 36 \cdot 2y$

$8 + 30 - 9 = 72y$

$29 = 72y \quad | : 72$

$y=\frac{29}{72}$

$L = \{\frac{29}{72}\}$

c) $\frac{2y + 6}{y + 3}=1$

Definitionsmenge:

$y + 3 = 0 \quad | - 3$

$y = -3$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{-3\}$

Lösungsmenge:

$\frac{2y + 6}{y + 3}=1 \quad | \cdot (y + 3)$

$2y + 6 = 1 \cdot (y + 3)$

$2y + 6 = 1 \cdot y + 1 \cdot 3$

$2y + 6 = y + 3 \quad | - y$

$y + 6 = 3 \quad | - 6$

$y = -3$

$L = Ø$

d) $\frac{5}{a-1} = \frac{7}{a+1}$

Definitionsmenge:

$a - 1 = 0 \quad | + 1$

$a = 1$

$a + 1 = 0 \quad | - 1$

$a = -1$

$D = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 1\}$

Lösungsmenge:

$\frac{5}{a-1} = \frac{7}{a+1} \quad | \cdot (a-1) \cdot (a+1)$

$5 \cdot (a+1) = 7 \cdot (a-1)$

$5 \cdot a + 5 \cdot 1 = 7 \cdot a + 7 \cdot (-1)$

$5a + 5 = 7a - 7 \quad | - 7a$

$5 = 2a - 7 \quad | + 7$

$12 = 2a \quad | : 2$

$a = 6$

$L = \{6\}$