

Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

1. Ermittle die Wahrscheinlichkeit bei einem Glücksrad.

a) Ein Glücksrad besteht aus drei Farb-Feldern, um die sich ein Zeiger dreht. Die Farbe Grün nimmt hierbei die Hälfte der Fläche ein, die Farbe Gelb ein Drittel und die Farbe Blau ein Sechstel.

Anmerkung:

$$\text{die Hälfte} = \frac{1}{2}, \text{ein Drittel} = \frac{1}{3}, \text{ein Sechstel} = \frac{1}{6}$$

Ermittle jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger auf Grün, Gelb oder Blau stehen bleibt.

b) Mache eine Prognose, wie oft der Zeiger nach 1000 Versuchen auf der gelben Fläche des Glücksrads stehen bleibt.

2. Macht es Sinn zu wetten, dass eine Frau an einem Roulettetisch sitzt?

In einem Spielkasino wurde festgestellt, dass 60 % aller Spieler am Roulettetisch Frauen sind.

Macht es Sinn, bei einer zufällig ausgewählten Person darauf zu wetten, dass sie eine Frau ist?

3. Ermittle für jedes Zufallsexperiment die Ergebnismenge. Gib auch an, ob ein Laplace-Versuch vorliegt.

Beim Wurf einer

a) Streichholzschachtel

b) eines Tetraeders

c) eines Kronkorkens

4. Berechne die jeweilige Wahrscheinlichkeit bei einem speziellen Skat-Blatt.

Ein normales Skat-Spiel besteht aus 32 Karten. Hierbei treten 4 verschiedene Farben auf, und zwar Kreuz, Pik, Herz und Karo. Darüber hinaus gibt es noch 8 verschiedene Werte: eine 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König und Ass.

Bei bestimmten Skat-Varianten kommen nur folgende Skatkarten zum Einsatz:

- a) Karten mit Bild
- b) Herz-Karten
- c) Karten ohne Bilder
- d) Schwarze Karten
- e) Kreuz-Karten mit Zahl
- f) Karo-Karten ohne Bild

Aus diesem Skat-Varianten-Spiel (von a bis f) wird jeweils zufällig eine Karte gezogen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit eines der möglichen Ergebnisse?

5. Bei einem Würfel tritt die Augenzahl 5 mit folgender Wahrscheinlichkeit auf:

$$P = \frac{1}{6}$$

Welche der nachfolgenden Aussagen sind richtig, welche der Aussagen sind falsch?

- a) Bei jedem 6. Wurf würfelt man eine 5.
- b) Unter 6 Würfeln hat man mindestens eine 5.
- c) Wenn 6-mal keine 5 gewürfelt wurde, nimmt die Wahrscheinlichkeit für das Würfeln einer 5 zu.
- d) Wird ein Würfel n-mal gewürfelt, beispielsweise $n = 600$, dann tritt die Würfelzahl 5 ungefähr so oft auf:

$$P = \frac{n}{6}$$

(Bei $n = 600$ wäre das Auftreten ungefähr 100-mal.)

e) Tritt bei 6 Würfeln keine 5 auf, so ist der Würfel gezinkt worden.

f) Wettet jemand 1 € darauf, dass beim nächsten Würfeln eine 5 gewürfelt wird, dann kann man ohne Weiteres 5 € dagegen wetten.

Lösungen

1. Ermittle die Wahrscheinlichkeit bei einem Glücksrad.

a) Ein Glücksrad besteht aus drei Farb-Feldern, um die sich ein Zeiger dreht. Die Farbe Grün nimmt hierbei die Hälfte der Fläche ein, die Farbe Gelb ein Drittel und die Farbe Blau ein Sechstel.

Anmerkung:

$$\text{die Hälfte} = \frac{1}{2}, \text{ ein Drittel} = \frac{1}{3}, \text{ ein Sechstel} = \frac{1}{6}$$

Ermittle jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger auf Grün, Gelb oder Blau stehen bleibt.

$$P(\text{Grün}) = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

$$P(\text{Gelb}) = \frac{1}{3} = 0,\bar{3} \approx 33\%$$

$$P(\text{Blau}) = \frac{1}{6} = 0,\bar{16} \approx 17\%$$

b) Mache eine Prognose, wie oft der Zeiger nach 1000 Versuchen auf der gelben Fläche des Glücksrads stehen bleibt.

$$\text{Erwartete Häufigkeit} = 1000 \cdot \frac{1}{3} \approx 333$$

Bei 1000 Versuchen bleibt der Zeiger des Glücksrades bei der Farbe Gelb ca. 333-mal stehen.

2. Macht es Sinn zu wetten, dass eine Frau an einem Roulettetisch sitzt?

In einem Spielkasino wurde festgestellt, dass 60 % aller Spieler am Roulettetisch Frauen sind.

Macht es Sinn, bei einer zufällig ausgewählten Person darauf zu wetten, dass sie eine Frau ist?

$$P(E) = 0,6 = 60 \%$$

Ist die Gewinnwahrscheinlichkeit höher als die Verlustwahrscheinlichkeit, also höher als 50 %, ist die Wette rational wahrscheinlich vorteilhaft. Im Gegensatz dazu ergibt es keinen Sinn, darauf zu setzen, dass keine Frau am Roulettetisch sitzt, da es rational wahrscheinlich unvorteilhaft ist.

3. Ermittle für jedes Zufallsexperiment die Ergebnismenge. Gib auch an, ob ein Laplace-Versuch vorliegt.

Beim Wurf einer

- a) Streichholzschachtel
- b) eines Tetraeders
- c) eines Kronkorkens

- a) Streichholzschachtel

$$\Omega = \{\text{flach, hochkant}\}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Streichholzschachtel flach liegen bleibt, ist viel höher, als dass sie hochkant liegen bleibt. Daher liegt kein Laplace-Experiment vor.

- b) eines Tetraeders

$$\Omega = \{\text{Fläche 1, Fläche 2, Fläche 3, Fläche 4}\}$$

Ein Tetraeder hat vier Flächen und die Wahrscheinlichkeit, dass eine dieser vier Flächen auftritt, ist gleich hoch. Daher liegt hier ein Laplace-Experiment vor.

- c) eines Kronkorkens

$$\Omega = \{\text{flache Seite, hohle Seite, Kante}\}$$

Die Wahrscheinlichkeit für flache Seite und hohle Seite ist nicht exakt gleich, auch wenn Kante nur sehr selten auftritt. Daher liegt hier kein Laplace-Experiment vor.

4. Berechne die jeweilige Wahrscheinlichkeit bei einem speziellen Skat-Blatt.

Ein normales Skat-Spiel besteht aus 32 Karten. Hierbei treten 4 verschiedene Farben auf, und zwar Kreuz, Pik, Herz und Karo. Darüber hinaus gibt es noch 8 verschiedene Werte: eine 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König und Ass.

Bei bestimmten Skat-Varianten kommen nur folgende Skatkarten zum Einsatz:

- a) Karten mit Bild
- b) Herz-Karten
- c) Karten ohne Bilder
- d) Schwarze Karten
- e) Kreuz-Karten mit Zahl
- f) Karo-Karten ohne Bild

Aus diesem Skat-Varianten-Spiel (von a bis f) wird jeweils zufällig eine Karte gezogen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit eines der möglichen Ergebnisse?

- a) Karten mit Bild

Anzahl möglicher Ergebnisse: Bube, Dame, König jeweils 4-mal: 12

$$P(\text{Bild}) = \frac{1}{12} = 0,08\bar{3} \approx 8,3\%$$

- b) Herz-Karten

Anzahl möglicher Ergebnisse: 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass jeweils 1-mal: 8

$$P(\text{Herz}) = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$$

- c) Karten ohne Bilder

Anzahl möglicher Ergebnisse: 7, 8, 9, 10, Ass jeweils 4 mal: 20

$$P(\text{ohne Bilder}) = \frac{1}{20} = 0,05 = 5 \%$$

d) Schwarze Karten

Anzahl möglicher Ergebnisse: 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass jeweils 2-mal: 16

$$P(\text{Schwarz}) = \frac{1}{16} = 0,0625 = 6,25 \%$$

e) Kreuz-Karten mit Zahl

Anzahl möglicher Ergebnisse: 7, 8, 9, 10 jeweils 1-mal: 4

$$P(\text{Kreuz mit Zahl}) = \frac{1}{4} = 0,25 = 25 \%$$

f) Karo-Karten ohne Bild

Anzahl möglicher Ergebnisse: 7, 8, 9, 10 jeweils 1-mal: 4

$$P(\text{Karo ohne Bild}) = \frac{1}{5} = 0,2 = 20 \%$$

5. Bei einem Würfel tritt die Augenzahl 5 mit folgender Wahrscheinlichkeit auf:

$$P = \frac{1}{6}$$

Welche der nachfolgenden Aussagen sind richtig, welche der Aussagen sind falsch?

a) Bei jedem 6. Wurf würfelt man eine 5.

b) Unter 6 Würfeln hat man mindestens eine 5.

c) Wenn 6-mal keine 5 gewürfelt wurde, nimmt die Wahrscheinlichkeit für das Würfeln einer 5 zu.

d) Wird ein Würfel n-mal gewürfelt, beispielsweise $n = 600$, dann tritt die Würfelzahl 5 ungefähr so oft auf:

$$P = \frac{n}{6}$$

(Bei $n = 600$ wäre das Auftreten ungefähr 100-mal.)

e) Tritt bei 6 Würfeln keine 5 auf, so ist der Würfel gezinkt worden.

f) Wettet jemand 1 € darauf, dass beim nächsten Würfeln eine 5 gewürfelt wird, dann kann man ohne Weiteres 5 € dagegen wetten.

a) Bei jedem 6. Wurf würfelt man eine 5.

Die Aussage ist falsch.

$$P = \frac{1}{6} = 0,1\bar{6} \approx 16,7$$

Aber es gibt keine Garantie, dass man nach jedem 6. Wurf eine 5 würfelt.

b) Unter 6 Würfeln hat man mindestens eine 5.

Die Aussage ist falsch.

$$P(\text{Keine 5 bei einem Wurf}) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 \approx 0,8\bar{3} \approx 83,3 \%$$

$$P(\text{Mindestens eine 5}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{15625}{46656} = 1 - 0,3349 \approx 0,6651 \approx 66,51 \%$$

Aber es gibt keine Garantie, dass unter 6 Würfeln auch mindestens eine 5 dabei ist.

c) Wenn 6-mal keine 5 gewürfelt wurde, nimmt die Wahrscheinlichkeit für das Würfeln einer 5 zu.

Die Aussage ist falsch.

$$P = \frac{1}{6} = 0,1\bar{6} \approx 16,7$$

Die Wahrscheinlichkeit bleibt dennoch gleich.

d) Wird ein Würfel n -mal gewürfelt, beispielsweise $n = 600$, dann tritt die Würfelzahl 5 ungefähr so oft auf:

$$P = \frac{n}{6}$$

(Bei $n = 600$ wäre das Auftreten ungefähr 100-mal.)

Die Aussage ist wahr.

Die relative Häufigkeit nähert sich immer mehr der Wahrscheinlichkeit eines einzigen Wurfes bei einem Würfel an, je mehr Würfe man macht.

e) Tritt bei 6 Würfeln keine 5 auf, so ist der Würfel gezinkt worden.

Die Aussage ist falsch.

$$P = \frac{1}{6} = 0,1\bar{6} \approx 16,7$$

Auch wenn nach 6 Würfeln keine 5 auftritt, bleibt die Wahrscheinlichkeit pro Wurf eines Würfels bestehen.

f) Wettet jemand 1 € darauf, dass beim nächsten Würfeln eine 5 gewürfelt wird, dann kann man ohne Weiteres 5 € dagegen wetten.

Die Aussage ist wahr.

$$P = \frac{1}{6} = 0,1\bar{6} \approx 16,7$$

$$P(E) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \approx 0,8\bar{3} \approx 83,3\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der 1-€-Wetter gewinnt, ist wesentlich schlechter als die Wahrscheinlichkeit, dass der 5-€-Wetter gewinnt. Daher kann man getrost 5 € wetten.