Aufgaben Trigonometrie am rechtwinkligen Dreieck

1. In einem Dreieck ABC mit $\alpha = 90°$ sind folgende Seitenlängen gegeben:

a) $a = 14{,}1$ cm; $b = 7{,}8$ cm

b) $a = 12{,}7$ cm; $b = 5{,}9$ cm

c) $a = 29{,}3$ cm; $b = 25{,}6$ cm

d) $a = 5{,}3$ cm; $c = 3{,}7$ cm

Berechne jeweils die fehlende Seitenlänge sowie die beiden anderen Winkel.

2. In einem Dreieck ABC ist Folgendes gegeben:

a) $a = 7{,}8$ cm; $b = 5{,}2$ cm; $\gamma = 90°$

b) $b = 23$ cm; $c = 16$ cm; $\alpha = 90°$

c) $a = 12{,}3$ cm; $c = 9{,}4$ cm; $\beta = 90°$

d) $a = 4{,}3$ cm; $b = 5{,}7$ cm; $\gamma = 90°$

Berechne jeweils die fehlende Seitenlänge sowie die beiden anderen Winkel.

3. Auf Straßenkarten findet man bei Passstraßen immer die Angabe der höchsten Steigung vor. So steht da beispielsweise:

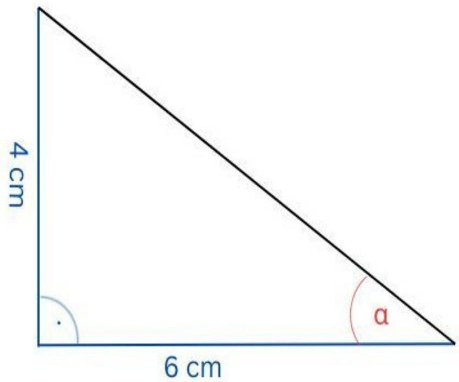
St. Gotthard: 10 %, Jaufenpass: 12 %, Furkapass: 11 %, Timmelsjoch: 13 %.

a) Wie hoch ist jeweils der Steigungswinkel?

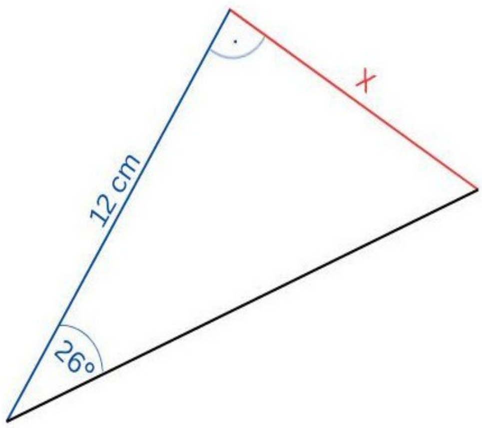
b) Welcher Höhenunterschied besteht, wenn die hierbei zurückgelegte Strecke 1,2 km beträgt?

4. In folgenden beiden Dreiecken soll jeweils die rot markierte Größe berechnet werden.

a) Ein rechtwinkliges Dreieck mit zwei Seitenangaben




b) Ein rechtwinkliges Dreieck mit Winkel- und Seitenangabe



Lösungen

1. In einem Dreieck ABC mit $\alpha = 90°$ sind folgende Seitenlängen gegeben:

a) $a = 14{,}1$ cm; $b = 7{,}8$ cm

b) $a = 12{,}7$ cm; $b = 5{,}9$ cm

c) $a = 29{,}3$ cm; $b = 25{,}6$ cm

d) $a = 5{,}3$ cm; $c = 3{,}7$ cm

Berechne jeweils die fehlende Seitenlänge sowie die beiden anderen Winkel.

a)

$$\sin\beta = \frac{b}{a} = \frac{7{,}8\,\text{cm}}{14{,}1\,\text{cm}} = \frac{26}{47} \approx 0{,}5532 \qquad |\ \sin^{-1}$$

$$\beta \approx 34°$$

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (90° + 34°) = 180° - 124° \approx 56°$$

$$\cos\beta = \frac{c}{a} \qquad |\ \cdot a$$

$$\cos\beta \cdot a = c \quad \text{bzw.} \quad c = \cos\beta \cdot a$$

$$c = \cos 34° \cdot 14{,}1\,\text{cm} \approx 11{,}7\,\text{cm}$$

b)

$$\sin\beta = \frac{b}{a} = \frac{5{,}9\,\text{cm}}{12{,}7\,\text{cm}} = \frac{59}{127} \approx 0{,}4646 \qquad |\ \sin^{-1}$$

$$\beta \approx 28°$$

$\gamma = 180° – (\alpha + \beta) = 180° – (90° + 28°) = 180° – 118° \approx 62°$

$\cos \beta = \frac{c}{a} \quad | \cdot a$

$\cos \beta \cdot a = c \quad \text{bzw.} \quad c = \cos \beta \cdot a$

$c = \cos 28° \cdot 12{,}7\,\text{cm} \approx 11{,}2\,\text{cm}$

c)

$\sin \beta = \frac{b}{a} = \frac{25{,}6\,\text{cm}}{29{,}3\,\text{cm}} = \frac{256}{293} \approx 0{,}8737 \quad | \sin^{-1}$

$\beta \approx 61°$

$\gamma = 180° – (\alpha + \beta) = 180° – (90° + 61°) = 180° – 151° \approx 29°$

$\cos \beta = \frac{c}{a} \quad | \cdot a$

$\cos \beta \cdot a = c \quad \text{bzw.} \quad c = \cos \beta \cdot a$

$c = \cos 61° \cdot 29{,}3\,\text{cm} \approx 14{,}2\,\text{cm}$

d)

$\cos \beta = \frac{c}{a} = \frac{3{,}7\,\text{cm}}{5{,}3\,\text{cm}} = \frac{37}{53} \approx 0{,}6981 \quad | \sin^{-1}$

$\beta \approx 46°$

$\gamma = 180° – (\alpha + \beta) = 180° – (90° + 46°) = 180° – 136° \approx 44°$

$\sin \beta = \frac{b}{a} \quad | \cdot a$

$\sin\beta \cdot a = b$ bzw. $b = \sin\beta \cdot a$

$b = \sin 46° \cdot 5{,}3\,\text{cm} \approx 3{,}8\,\text{cm}$

2. In einem Dreieck ABC ist Folgendes gegeben:

a) $a = 7{,}8$ cm; $b = 5{,}2$ cm; $\gamma = 90°$

b) $b = 23$ cm; $c = 16$ cm; $\alpha = 90°$

c) $a = 12{,}3$ cm; $c = 9{,}4$ cm; $\beta = 90°$

d) $a = 4{,}3$ cm; $b = 5{,}7$ cm; $\gamma = 90°$

Berechne jeweils die fehlende Seitenlänge sowie die beiden anderen Winkel.

a)

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{7{,}8\,\text{cm}}{5{,}2\,\text{cm}} = \frac{3}{2} = 1{,}5 \qquad |\ \tan^{-1}$$

$\alpha \approx 56°$

$\beta = 180° - (\gamma + \alpha) = 180° - (90° + 56°) = 180° - 146° \approx 34°$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad |\ \cdot c$$

$$\sin\alpha \cdot c = a \qquad |\ :\sin\alpha$$

$$c = \frac{a}{\sin\ \alpha} = \frac{7{,}8\,\text{cm}}{\sin\ 56°} \approx 9{,}4\,\text{cm}$$

b)

$$\tan\beta = \frac{b}{c} = \frac{23\,\text{cm}}{16\,\text{cm}} = \frac{23}{16} = 1{,}4375 \qquad |\ \tan^{-1}$$

$\beta \approx 55°$

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (90° + 55°) = 180° - 145° \approx 35°$

$\sin\beta = \frac{b}{a} \qquad | \cdot a$

$\sin\beta \cdot a = b \qquad | : \sin\beta$

$a = \frac{b}{\sin\ \beta} = \frac{23\,\text{cm}}{\sin\ 55°} \approx 28{,}1\,\text{cm}$

c)

$\tan\alpha = \frac{a}{c} = \frac{12{,}3\,\text{cm}}{9{,}4\,\text{cm}} = \frac{123}{94} \approx 1{,}309 \qquad | \tan^{-1}$

$\alpha \approx 53°$

$\gamma = 180° - (\beta + \alpha) = 180° - (90° + 53°) = 180° - 143° \approx 37°$

$\sin\alpha = \frac{a}{b} \qquad | \cdot b$

$\sin\alpha \cdot b = a \qquad | : \sin\alpha$

$b = \frac{a}{\sin\ \alpha} = \frac{12{,}3\,\text{cm}}{\sin\ 53°} \approx 15{,}4\,\text{cm}$

d)

$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{4{,}3\,\text{cm}}{5{,}7\,\text{cm}} = \frac{43}{57} \approx 0{,}7544 \qquad | \tan^{-1}$

$\alpha \approx 37°$

$\beta = 180° - (\gamma + \alpha) = 180° - (90° + 37°) = 180° - 146° \approx 53°$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \qquad | \ \cdot c$$

$$\sin\alpha \cdot c = a \qquad | \ :\sin\alpha$$

$$c = \frac{a}{\sin\ \alpha} = \frac{4{,}3\,\text{cm}}{\sin\ 37°} \approx 7{,}1\,\text{cm}$$

3. Auf Straßenkarten findet man bei Passstraßen immer die Angabe der höchsten Steigung vor. So steht da beispielsweise:

St. Gotthard: 10 %, Jaufenpass: 12 %, Furkapass: 11 %, Timmelsjoch: 13 %.

a) Wie hoch ist jeweils der Steigungswinkel?

St. Gotthard: 10 %

$$\tan\alpha = \frac{10}{100} = 0{,}1 \qquad | \ \tan^{-1}$$

$$\alpha \approx 5{,}7°$$

Der Steigungswinkel α beträgt ca. 5,7°.

Jaufenpass: 12 %

$$\tan\alpha = \frac{12}{100} = 0{,}12 \qquad | \ \tan^{-1}$$

$$\alpha \approx 6{,}8°$$

Der Steigungswinkel α beträgt ca. 6,8°.

Furkapass: 11 %

$$\tan\alpha = \frac{11}{100} = 0{,}11 \qquad | \ \tan^{-1}$$

$$\alpha \approx 6{,}4°$$

Der Steigungswinkel α beträgt ca. 6,3°.

Timmelsjoch: 13 %.

$$\tan\alpha = \frac{13}{100} = 0{,}13 \qquad |\ \tan^{-1}$$

$$\alpha \approx 7{,}4°$$

Der Steigungswinkel α beträgt ca. 7,4°.

b) Welcher Höhenunterschied besteht, wenn die hierbei zurückgelegte Strecke 1,2 km beträgt?

$$\sin\alpha = \frac{\text{Höhenunterschied}}{\text{Strecke}} \qquad |\ \cdot \text{Strecke}$$

$$\sin\alpha \cdot \text{Strecke} = \text{Höhenunterschied} \quad \text{bzw.} \quad \text{Höhenunterschied} = \sin\alpha \cdot \text{Strecke}$$

St. Gotthard:

$$\text{Höhenunterschied} = \sin\alpha \cdot \text{Strecke} = \sin 5{,}7° \cdot 1200\,\text{m} = 119{,}18\,\text{m}$$

Der Höhenunterschied beträgt hier 119,18 m.

Jaufenpass

$$\text{Höhenunterschied} = \sin\alpha \cdot \text{Strecke} = \sin 6{,}8° \cdot 1200\,\text{m} = 142{,}08\,\text{m}$$

Der Höhenunterschied beträgt hier 142,08 m.

Furkapass:

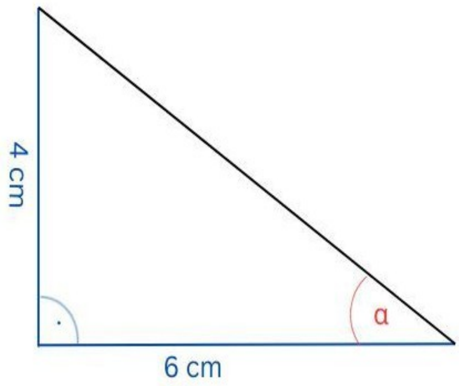
$$\text{Höhenunterschied} = \sin\alpha \cdot \text{Strecke} = \sin 6{,}3° \cdot 1200\,\text{m} = 131{,}68\,\text{m}$$

Timmelsjoch

$$\text{Höhenunterschied} = \sin\alpha \cdot \text{Strecke} = \sin 7{,}4° \cdot 1200\,\text{m} = 154{,}55\,\text{m}$$

4. In folgenden beiden Dreiecken soll jeweils die rot markierte Größe berechnet werden.

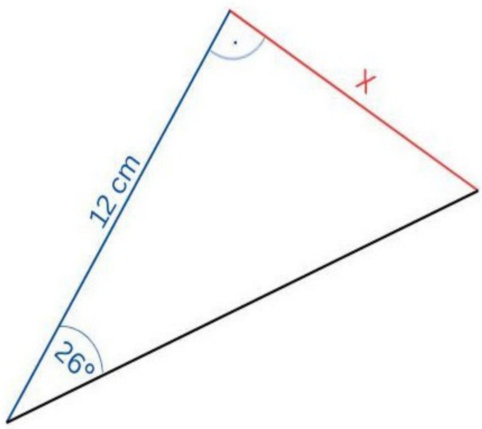
a) Ein rechtwinkliges Dreieck mit zwei Seitenangaben




$$\tan\alpha = \frac{4\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{2}{3} \approx 0{,}6667 \qquad | \ \tan^{-1}$$

$\alpha \approx 34°$

b) Ein rechtwinkliges Dreieck mit Winkel- und Seitenangabe




$$\tan 26° = \frac{x}{12\text{cm}} \qquad | \ \cdot 12\,\text{cm}$$

$\tan 26° \cdot 12\,\text{cm} = x$

$5{,}85\,\text{cm} = x \quad$ bzw. $\quad x = 5{,}85\,\text{cm}$